Komplexe mit endlicher Automorphismengruppe.

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von

Friedrich Hanssmann

aus Frankfurt am Main

Frankfurt am Main

1 9 5 4

- D3o -

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Zusammenfassung.

Es werden endliche Simplizialkomplexe betrachtet, die eine endliche Gruppe von homöomorphen Selbstabbildungen, kurz eine Automorphismengruppe, besitzen. Durch die Automorphismen werden die Kettengruppen (über dem Körper der komplexen Zahlen) gewissen Selbstabbildungen unterworfen. Das Verhalten der Kettengruppen des Komplexes bei diesen Selbstabbildungen ist Gegenstand der Arbeit. Es wird zur Gewinnung von Homologieinvarianten ausgenutzt. Das algebraische Hilfsmittel ist die Darstellungstheorie.
Die Automorphismengruppe eines Komplexes induziert in sämtlichen Kettengruppen (als Darstellungsmoduln) Darstellungen von sich selbst. Jede solche Darstellung enthält gewisse absolut-irreduzible Bestandteile I^{μ}. Jedem I^{μ} entspricht eine Untergruppe K_r^{μ} der r-dimensionalen Kettengruppe, die bei allen Automorphismen gemäss der Darstellung I^{μ} in sich transformiert wird. Durch Zusammenfassung aller K_r^{μ} für eine bestimmte absolut-irreduzible Darstellung I^{μ} und alle Dimensionen r entsteht ein sog. algebraischer Komplex, der bezüglich der Berandungsoperation in sich abgeschlossen ist. Daher lässt sich für jeden derartigen Komplex eine den Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes analoge Bildung definieren. Die "Bettischen Zahlen" der algebraischen Teilkomplexe haben die Form $g^{\mu} \cdot q_r^{\mu}$, wo g^{μ} der Grad der zugehörigen absolut-irreduziblen Darstellung ist.
So ergeben sich ganzzahlige Homologieinvarianten q_r^{μ} des Komplexes mit Automorphismen. Zur bequemeren Untersuchung der gewonnenen Invarianten wird die Theorie der harmonischen Ketten für komplexe Koeffizienten entwickelt. Unter einer harmonischen Kette versteht man eine sowohl geschlossene als auch offene Kette. Die r-dimensionale Kettengruppe eines Komplexes ist die direkte Summe der Untergruppen der Ränder, Coränder und harmonischen Ketten. Die harmonischen Ketten geben eine einfache Darstellung der Homologieklassen an die Hand

Hauptsächliche Eigenschaften der Invarianten q_r^μ und der Zerlegungen der Kettengruppen sind:

1. Die Bettischen Zahlen des Komplexes mit Automorphismen sind $p_r = \sum_\mu g^\mu q_r^\mu$, wobei über sämtliche absolut-irreduzible Darstellungen der Automorphismengruppe zu summieren ist. Die Bettischen Zahlen werden also "verfeinert".
2. Sei der Komplex mit Automorphismen $\mathfrak{M}$ eine reguläre Überlagerung eines Grundkomplexes $\underline{\mathfrak{M}}$, und sei $\mathfrak{M}'$ eine reguläre "Zwischenüberlagerung", die von $\mathfrak{M}$ überlagert wird und $\underline{\mathfrak{M}}$ überlagert. Die Gruppe der Decktransformationen von $\mathfrak{M}$ über $\mathfrak{M}'$ sei $\mathfrak{H}$. Sie ist eine Untergruppe der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$. Sind $I^{\mu_1},\ldots,I^{\mu_k}$ diejenigen absolut-irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$, welche die Untergruppe $\mathfrak{H}$ trivial darstellen (durch die identische Darstellung), so gilt für die Bettischen Zahlen der Zwischenüberlagerung:
$p'_r = g^{\mu_1} q_r^{\mu_1} + \ldots + g^{\mu_k} q_r^{\mu_k}$.
3. Die Invarianten q_r^μ lassen sich auch mit Hilfe von Überdeckungen des Grundkomplexes $\underline{\mathfrak{M}}$ mit Matrizenringen gewinnen, wobei die Matrizen lineare Komposita der Matrizen der Darstellungen I^μ sind.
4. Bei Mannigfaltigkeiten bestehen zwischen den Invarianten in komplementären Dimensionen Bindungen, die es gestatten, die N-r-dimensionalen Invarianten rein darstellungstheoretisch zu berechnen, wenn die r-dimensionalen Invarianten q_r^μ sowie die topologischen Abbildungsgrade der einzelnen Automorphismen bekannt sind. N bedeutet dabei die Dimension der Mannigfaltigkeit.
5. Die Zerlegung der Kettengruppen induziert eine Zerlegung der Abbildungsspuren der Homologiegruppen bei Selbstabbildungen des Komplexes mit Automorphismen. So werden die Abbildungsinvarianten ebenfalls verfeinert. Die gewonnenen Invarianten genügen verschiedenen Relationen, insbesondere "Spurformeln", wie sie schon für die Invarianten q_r^μ gelten.

Lebenslauf.

Friedrich Hanssmann, geboren am 28.8.29 in Frankfurt am Main, von 1929 - 37 wohnhaft in Niederjosbach/Taunus, seit 1937 in Hofheim/Taunus.
Am 16.3.48 Abitur am Leibniz-Realgymnasium in Frankfurt/M - Höchst, Studium der Mathematik und Physik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main,daselbst Diplom in Mathematik am 31.5.52, Staatsexamen für das Höhere Lehramt in Mathematik und Physik am 18. - 21.11.52 und 16.6.53, seit 1.1o.53 Vorbereitungsdienst für das Lehramt an Höheren Schulen in Wiesbaden und Frankfurt am Main.

Seit November 1952 bin ich mit der Anfertigung meiner Promotionsarbeit beschäftigt.
Meinen akademischen Lehrern, insbesondere Herrn Professor Dr. W. Franz, bin ich zu grossem Dank verpflichtet.

1. Referent: Prof. Dr. W. Franz
2. Referent: Prof. Dr. R. Moufang

Tag der mündlichen Prüfung: 11. 2. 1955

54/179x